Исследовательская работа: «Решение задач геометрии методами инженерной графики»

Преподаватель математики: Шешина Е.В.;
преподаватель инженерной графики: Казанцева Н.Н.,
Минусинский сельскохозяйственный колледж

Содержание

Введение

Задачи по стереометрии - хорошие упражнения, которые способствуют развитию пространственных представлений, умению логически мыслить, способствующие более глубокому усвоению материала.

Решение пространственных задач геометрии вычислительными методами достаточно трудоемкий и длительный процесс, т.к. всё время приходится возвращаться к планиметрии, повторять теоремы, формулы, необходимые для решения.

Данная проблема требует поиска более коротких и простых способов решения, поэтому нахождение оптимальных путей решения данной проблемы актуально.

Известно, что начертательная геометрия является связующим звеном между геометрией и техническим черчением, в связи с этим у нас возникло предположение о возможности применения приемов начертательной геометрии к решению геометрических задач, что, возможно, упростит их решение.

Все вышеизложенное определило проблему, объект и предмет исследования, цель, гипотезу и задачи исследования.

Проблема: сложность решения задач геометрии вычислительными методами.

Объект исследования: задачи геометрии.

Предмет исследования: методы решения стереометрических задач.

Цель исследования: поиск возможностей решения задач геометрии графическими методами.

Гипотеза: упростить решение задач геометрии возможно с применением графических методов начертательной геометрии.

Задачи исследования:

1. Изучить методы решения стереометрических задач в геометрии.
2. Изучить методы решения задач с геометрическими телами в начертательной геометрии.
3. Исследовать возможность использования методов начертательной геометрии при решении задач геометрии.

Актуальность исследования: необходимость поиска наиболее оптимальных способов решения задач.

1. Теоретическая часть исследовательской работы

1.1. Изучение методов решения стереометрических задач в геометрии

Для решения стереометрических задач обычно используются три основных метода:

- геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из теорем планиметрии и стереометрии;
- алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;
- комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

Решение задачи начинается с выполнения чертежа и анализа: выясняются геометрические свойства фигуры и намечается план решения. При этом часто приходится выполнять различные дополнительные построения.

В некоторых случаях кроме изображения пространственной фигуры полезно сделать плоский чертеж, представляющий собой какое-либо сечение даннного тела, развертку его поверхности или проекцию на некоторую плоскость.

Значение чертежа при решении задач очень велико. Запись условия задачи с помощью чертежа позволяет охватить в наглядной форме всё условие целиком и понять его, что существенно облегчает анализ задачи, поиски путей решения.

Основные методы решения геометрических задач включают в себя:

- *метод дополнительного построения*: решение любой геометрической задачи начинается с работы над чертежом. При этом иногда на чертеже, где изображено только условие, сложно увидеть связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру достроить, эти связи становятся очевидными;
- *метод подобия:* в этом методе используются признаки подобия треугольников;
- *метод замены:* данный метод широко применяется в алгебраических задачах, но может быть использован и в геометрии, где фигура заменяется другой фигурой с той же искомой величиной;
- *метод введения вспомогательного неизвестного:* составляются уравнения, где для упрощения решения вводится какие-либо обозначения;

– *метод площадей:* главным объектом данного метода является площадь, рассматривается отношение площадей фигур, одна из которых (или обе) содержит в себе искомые элементы;

– *метод «вспомогательных объемов»:* суть метода заключается в том, что объём некоторой фигуры выражается двумя способами, а затем из полученных равенств выражается искомая величина;

– *векторный метод:* применение критериев коллинеарности и компланарности векторов в решении задач;

– *координатный метод:* координатный метод сводит геометрические задачи к алгебраическим;

– *поэтапно-вычислительный:* последовательно вычисляются промежуточные величины, с помощью которых искомые величины связываются с данными.

1.2.Изучение методов решения задач в начертательной геометрии

Задачи начертательной геометрии решаются графическим путем. Это могут быть как метрические, так и позиционные задачи. В соответствии с целью нашего исследования интерес представляют графические способы решения метрических задач.

Анализ метрических задач начертательной геометрии позволяет выделить три основных группы задач:

- задачи на определение натуральной величины объектов;
- задачи на определение расстояний между объектами;
- задача на определение углов между объектами.

В основу решения метрических задач положен проекционный чертеж (эпюр Монжа), который обладает замечательным свойством – обратимостью, т.е. по заданному проекционному чертежу любого геометрического объекта можно определить не только форму объекта и его положение в пространстве, но и его размеры, т.е. метрические характеристики. К ним относятся линейные размеры объекта, расстояния между объектами, угловые размеры между элементами объекта или между двумя объектами, площади плоских геометрических фигур и объемы тел.

Если геометрический объект располагается в пространстве в частном положении, т.е. параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций, то многие его метрические характеристики могут быть легко определены по проекционному чертежу.

Однако при общем положении геометрического объекта относительно плоскостей проекций определение метрических характеристик представляет собой определённую сложность, связанную с тем, что при параллельном ортогональном (прямоугольном) проецировании многие метрические характеристики геометрических объектов искажаются. Некоторые размеры объекта непосредственно на проекционном чертеже измерить нельзя, так как они не изображаются на эпюре в натуральной (действительной) величине.

Однако наряду с этим между объектом в пространстве и его проекцией существует определённая связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства объекта сохраняются и на его проекциях. Такие свойства называются инвариантными (независимыми). *Инвариантные свойства проекций* играют в начертательной геометрии роль аксиом, т.е. положений, не требующих доказательств.

Среди инвариантных свойств, используемых в метрических задачах, можно отметить следующие:

– если прямая параллельна плоскости проекций, то она проецируется на эту плоскость в натуральную величину;
– если прямая параллельна плоскости проекций, то углы наклона её к другим плоскостям проекций изображаются в натуральную величину на проекции, где прямая изображается в натуральную величину;
– если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то она проецируется на эту плоскость в виде точки;
– плоская фигура или плоский угол, параллельные плоскости проекций, проецируются на эту плоскость в натуральную величину;
– если плоская фигура и плоский угол перпендикулярны плоскости проекций, то они проецируются на эту плоскость в виде прямой линии;
– расстояние между геометрическими объектами изображается на проекциях в натуральную величину, если это расстояние параллельно плоскости проекций;
– расстояние от точки до прямой изображается на проекциях в натуральную величину, если прямая является проецирующей прямой и «вырождается» на одной из проекций в точку;
– расстояние между параллельными прямыми изображается в натуральную величину, если они являются проецирующими и «вырождаются» на одной из проекций в точки;
– расстояние от точки до плоскости изображается в натуральную величину, если плоскость является проецирующей и на одной из проекций «вырождается» в линию;
– расстояние между двумя параллельными плоскостями изображается в натуральную величину, если плоскости являются одноимённо-проецирующими и «вырождаются» на одной из проекций в линии;
– угол между прямой и плоскостью изображается в натуральную величину, если плоскость является проецирующей, а прямая – линией уровня;
– угол между двумя плоскостями изображается в натуральную величину, если обе плоскости являются одноимённо-проецирующими (или если их общее ребро является проецирующим);
– плоскопараллельный перенос геометрического объекта или плоскости проекций не изменяет вида и размеров проекции объекта.

Теорема прямого угла является одной из основных теорем, определяющих многие построения в метрических задачах. Теорема заключается в следующем, если один катет прямого угла параллелен какой-либо плоскости (или плоскости проекций), а другой катет не параллелен и не перпендикулярен упомянутой плоскости, то прямой угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину, т.е. в 90°. Теорема прямого угла распространяется не только на пересекающиеся перпендикулярные прямые, но и на перпендикулярные скрещивающиеся прямые.

При решении метрических задач широко используются *методы преобразования эпюра Монжа,* они предназначены для перевода геометрических объектов из общего положения в частное, что значительно упрощает решение метрических задач по сравнению с использованием общегеометрических методов. При решении метрических задач могут быть использованы практически все методы преобразования:

- метод перемены плоскостей проекций, метод вращения вокруг проецирующих осей;
- метод вращения вокруг горизонтали или фронтали;
- метод совмещения;
- метод плоскопараллельного перемещения.

Метод перемены (замены) плоскостей проекций заключается в том, что геометрический объект остаётся неподвижным, а плоскости проекций заменяются другими плоскостями так, чтобы в новой системе плоскостей проекций геометрический объект стал занимать частное положение, т.е. параллельное или перпендикулярное новым плоскостям проекций.

Метод вращения вокруг проецирующей оси, вокруг следов плоскости (метод совмещения) и вокруг горизонтали или фронтали заключается в том, что геометрический объект вращают вокруг упомянутых осей до тех пор, пока он не займёт частное положение относительно неподвижных плоскостей проекций. Все методы вращения основываются на общих закономерностях вращения, называемых параметрами вращения.

Метод плоскопараллельного перемещения заключается в том, что объект перемещают в пространстве плоскопараллельно так, чтобы он стал занимать частное положение относительно плоскостей проекций. Можно совершать одно или два плоскопараллельных перемещения.

Основными задачами методов преобразования являются:

- перевод прямой общего положения в положение горизонтали или фронтали;
- перевод прямой общего положения в проецирующее положение;

– преобразование плоскости общего положения в горизонтальную или фронтальную плоскость;
– преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

Все вышерассмотренные основные методики и положения являются теоретической основой решения всего многообразия метрических задач.

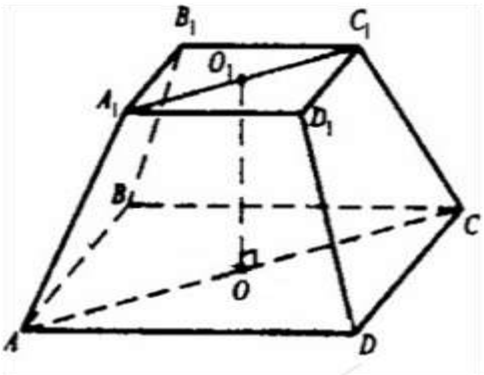
Анализ графических методов решения задач начертательной геометрии показывает возможность их использования для нахождения действительной величины отрезков, углов, геометрических фигур, а, следовательно, и для решения задач, предлагаемых в геометрии.

2. Практическая часть исследовательской работы – исследование возможности использования методов начертательной геометрии при решении задач геометрии.

Задача 1.

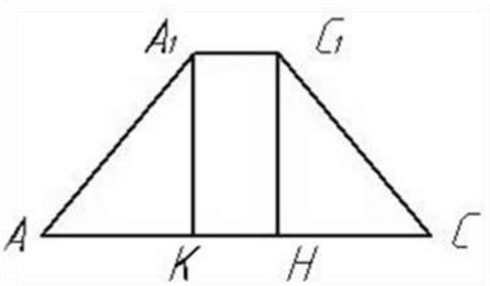
Найти боковое ребро правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если высота 7 см, а стороны оснований 2 см и 10 см. [2, с.89]

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ усечённая пирамида
$A_1B_1 = 2$см
$AB = 10$см
$OO_1 = 7$см
Найти: AA_1 – ?



Математическое решение:

Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C.

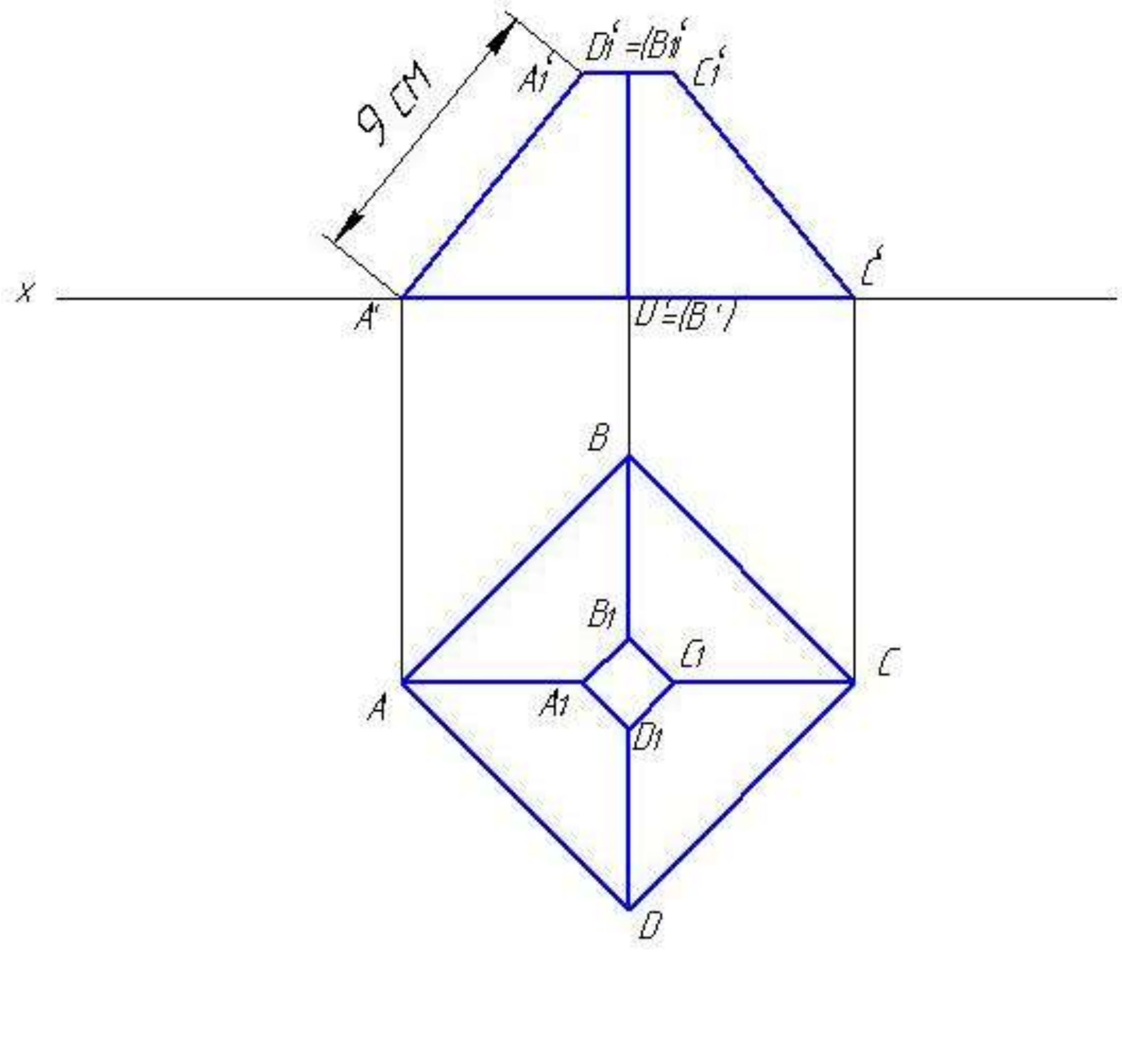


У него $AA_1=CC_1$ и $A_1C_1 \parallel AC$. Следовательно, AA_1C_1C - это равнобедренная трапеция.
A_1C_1 и AC — диагонали квадратов, лежащих в основании усеченной пирамиды.
Значит, $A_1C_1=A_1B_1\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (см) и $AC=AB\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ (см).
Т.к. A_1K и C_1H перпендикулярны AC, то A_1C_1HK – прямоугольник и $A_1K=C_1H=7$см.
Прямоугольные $\Delta\ AA_1K$ и ΔCC_1H равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $AK=CH$.
Тогда $CH=AK=1/2(AC-A_1C_1)=4\sqrt{2}$ (см)
Далее, по теореме Пифагора в ΔAA_1K: $AA_1=\sqrt{AK^2+\ AK1^2}\ =\sqrt{81}=9$см
Ответ: величина бокового ребра равна 9 см.

Графическое решение:

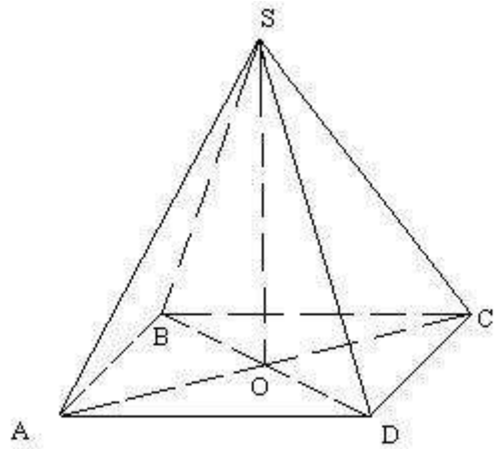
Из начертательной геометрии известно, что если отрезок параллелен плоскости проекций, то на нее он проецируется в натуральную величину. Поэтому для нахождения натуральной величины бокового ребра необходимо расположить одну из его проекций параллельно какой-либо плоскости.

С учетом этого по заданным размерам строим две проекции пирамиды, выбрав ориентацию горизонтальной проекции так, чтобы боковое ребро AA_1, величину которого нужно найти, располагалось параллельно оси x, а, следовательно, параллельно фронтальной плоскости проекций. Чертеж представлен на рисунке. При этом на фронтальной плоскости мы получим натуральную величину этого ребра AA_1. Измерения показывают, что оно равно 9 см.



Задача 2.

Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см и одной из диагоналей 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найти боковые ребра пирамиды. [1, с.82]



Дано: SABCD – пирамида

ABCD - параллелограмм

AB=3 см

BC=7 см

BD=6 см

SO=4см

BO=OD; AO=OC

Найти: SB; AS – ?

Математическое решение:

Рассмотрим ΔSBO ($\llcorner$SOB=90^0т.к. SO $\perp$ (ABC) => SO $\perp$ BO , SO – высота)

ΔSBO – прямоугольный => по т. Пифагора $SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = 5см$, где

BO = 1/2*BD = 3см; BO = OD => SB = SD = 5 см

$2*(AB^2+BC^2) = BD^2+AC^2$ => $AC = \sqrt{116 - 36} = 2\sqrt{20}$

OC = 1/2*AC = $\sqrt{20}$

Рассмотрим ΔSOC ($\llcorner$SOC = 90^0 т.к. SO $\perp$ (ABC) => SO $\perp$ CO, SO – высота)

ΔSOC – прямоугольный, по т. Пифагора $SC = \sqrt{SO^2 + CO^2} = 6см$

SC = SA = 6 см

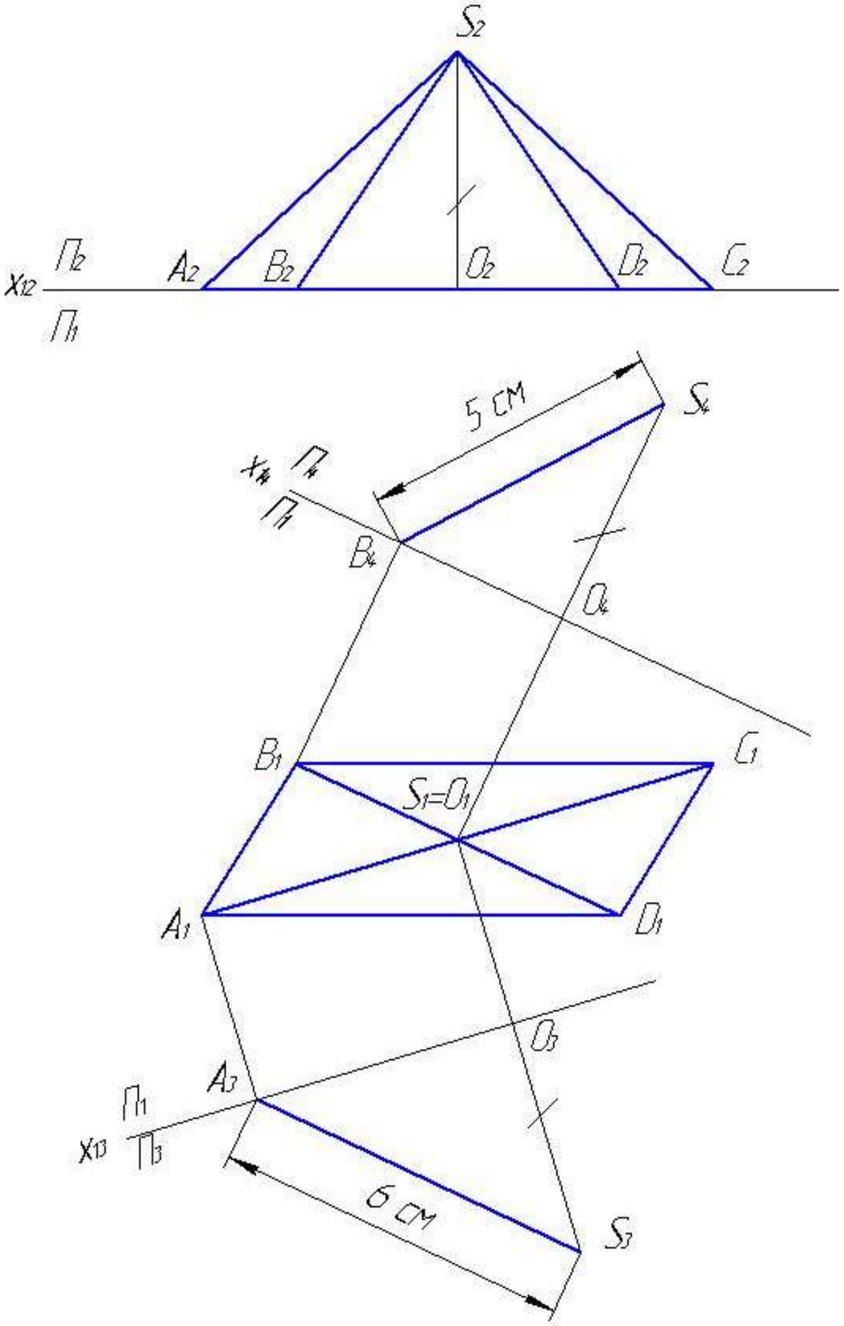
Ответ: 5 и 6 см.

Графическое решение.

В данной задаче одновременно расположить ребра пирамиды SA и SB, величину которых необходимо найти, параллельно плоскостям проекций невозможно, поэтому искать натуральную величину этих ребер следует другим способом.

Начертательная геометрия располагает таким способом определения натуральной величины, как способ перемены плоскостей проекций. Согласно этому способу необходимо провести дополнительную плоскость, параллельно элементу, натуральную величину которого нужно найти, и спроецировать на нее этот элемент.

Решение начинаем с построения горизонтальной и фронтальной проекции пирамиды. Затем параллельно ребру S_1A_1 на горизонтальной плоскости проводим ось x_{13} и проецируем это ребро на плоскость $П_3$, получив натуральную величину ребра SA – отрезок S_3A_3. Аналогично, проведя ось x_4 параллельно ребру SB, находим натуральную величину этого ребра – отрезок S_4B_4. Измерив отрезки S_3A_3 и S_4B_4, определяем величину боковых ребер пирамиды: SA= 6 см, SB=5 см.



Задача 3.

В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований — 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды . [2, с.89]

Дано: прав. усеч. пирамида

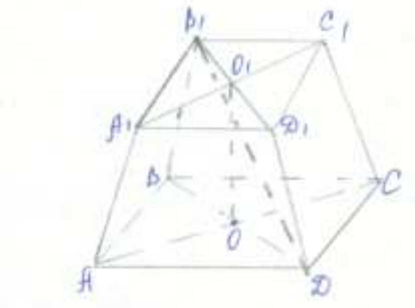
$ABCD$ – квадрат

$OO_1 = 2$ см

$AD = 5$см

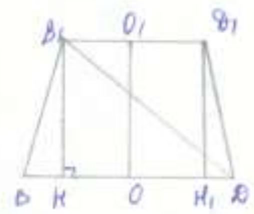
$A_1D_1 = 3$см

Найти: B_1D – ?



Математическое решение:

Диагональным сечением данной пирамиды является равнобокая трапеция BB_1D_1D



$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты

AC и A_1C_1 – диагонали квадратов =>

$AC = AD\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ см $= BD$

$A_1C_1 = A_1B_1\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ см $= B_1D_1$

$B_1H = O_1O = 2$см

$BH = \frac{BD - B1D1}{2} = \frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\Delta\, B_1HD$ – прямоугольный, $\angle\, B_1HD = 90^0$

$HD = BD – BH = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ см

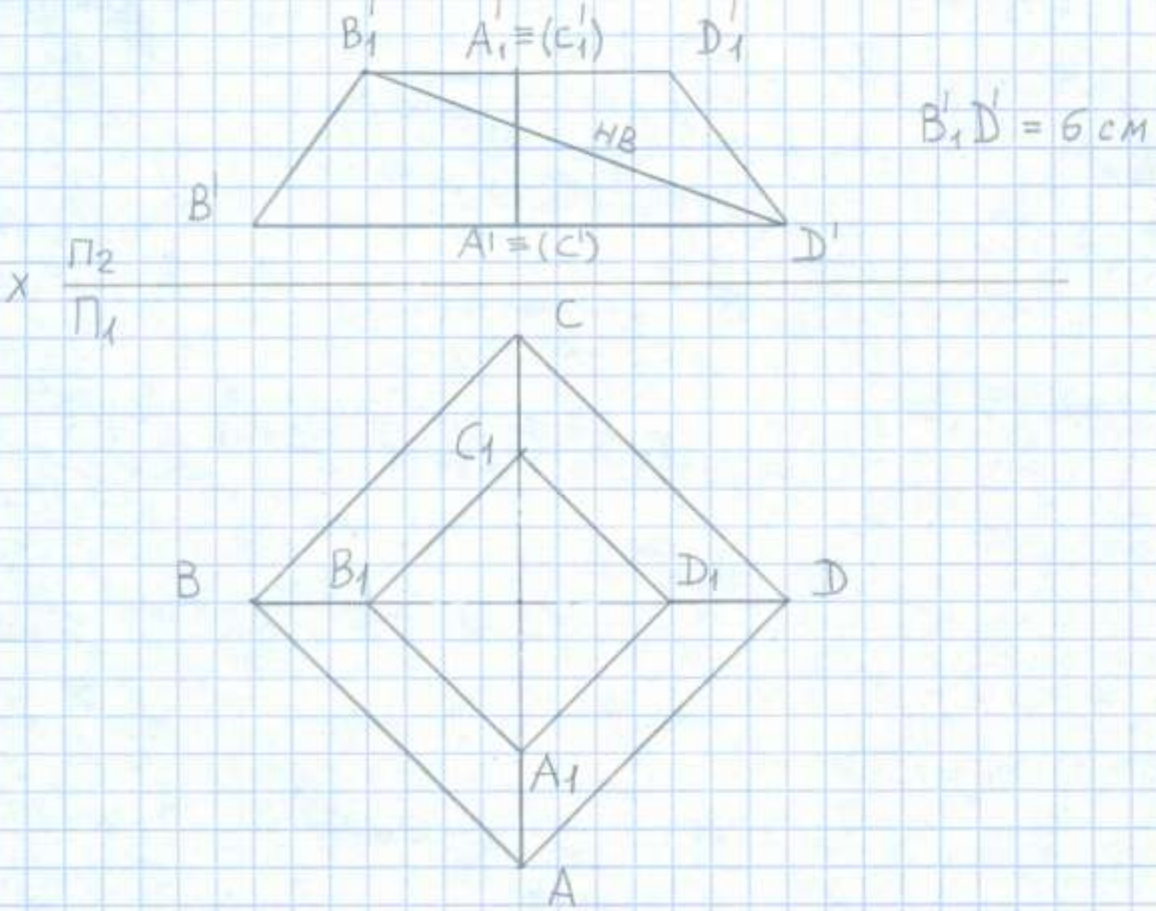
По т. Пифагора $B_1D = \sqrt{B1H^2 + HD^2} = \sqrt{4 + (4\sqrt{2})^2} = 6$см

Ответ: 6 см

Графическое решение:

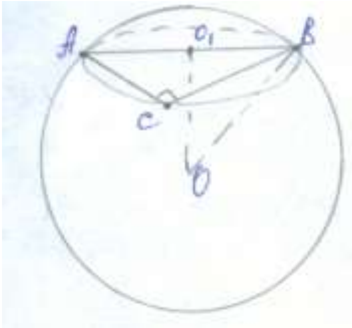
1. Выбираем оптимальные проекции, то есть π1 и π2. Строим усеченную пирамиду по заданным размерам.
2. B_1D = 6см – диагональ усеченной пирамиды. На π2 является искомой величиной.

Задача 3



Задача 4.

На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см, 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки. [2, с.106]



Дано: шар

$R_ш = 13$см

$AB = 10$см

$BC = 8$см

$AC = 6$см

Найти: OO_1 – ?

Математическое решение:

Проведем OO_1 перпендикулярно плоскости ΔABC.

ΔACB - прямоугольный, $\angle ACB = 90^0$, т.к. $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$OO_1 \perp AB$: O и O_1 – центры =>

ΔOO_1B - прямоугольный, $\angle OO_1B = 90^0$,

$O_1B = 1/2AB = 1/2*10 = 5$ см, $OB = R_ш = 13$см

$OO_1 = \sqrt{OB^2 - O1B^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$см

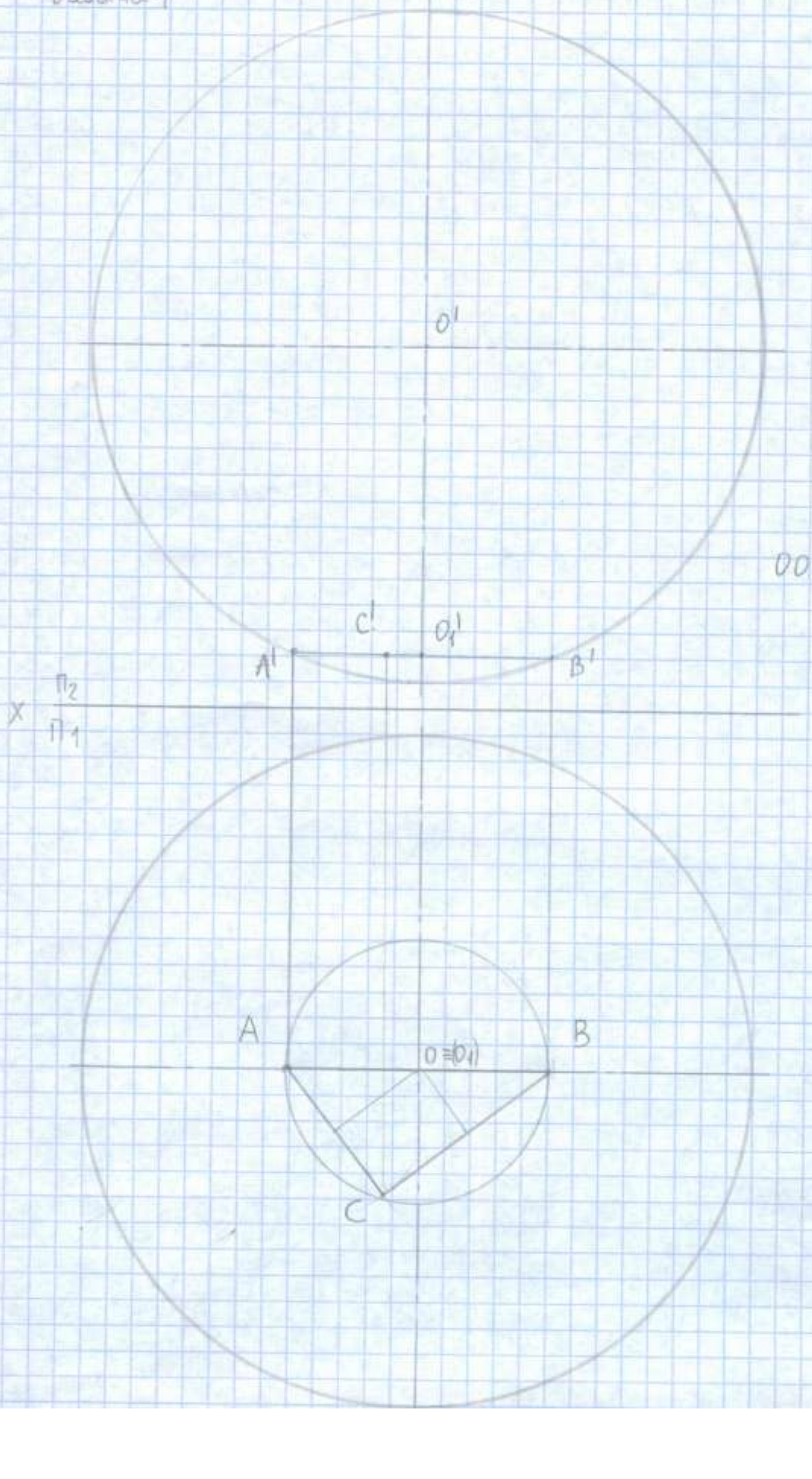
Ответ: 12см

Графическое решение:

1. Выбираем оптимальные проекции, то есть π1 и π2.
2. На горизонтальной плоскости проекции (π1) строим треугольник ABC по заданным размерам.
3. Проводим серединные перпендикуляры для нахождения центра описанной окружности.
4. Строим горизонтальную и фронтальную проекции шара по заданным размерам
5. Находим положение плоскости треугольника на фронтальной проекции шара
6. $OO_1 = 12$ см – расстояние от центра шара до плоскости треугольника, на π2 является искомой величиной.

Задача 4

М 1:2



$OO_1 = 12$ cm

Задача 5.

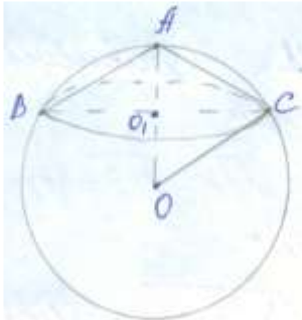
Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка А и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от А на 15 см. Найдите радиус этой окружности. [2, с.106]

Дано: шар

$d_ш = 25$см

$AB = AC = 15$см

Найти: r – ?



Математическое решение:

ΔAOC: $AO = r_ш = 1/2\ d_ш = 1/2*2*5 = 12{,}5$см

CO_1 – высота, $CO_1 \perp AO$

p = 20

$S = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)} = \sqrt{p(p-AC)(p-OC)(p-AO)} =$

$= \sqrt{20*5*7{,}5*7{,}5} = 75$см^2

$S = 1/2 CO_1 AO$

$CO_1 = \frac{2S}{AO} = \frac{2*75}{12{,}5} = 12$см

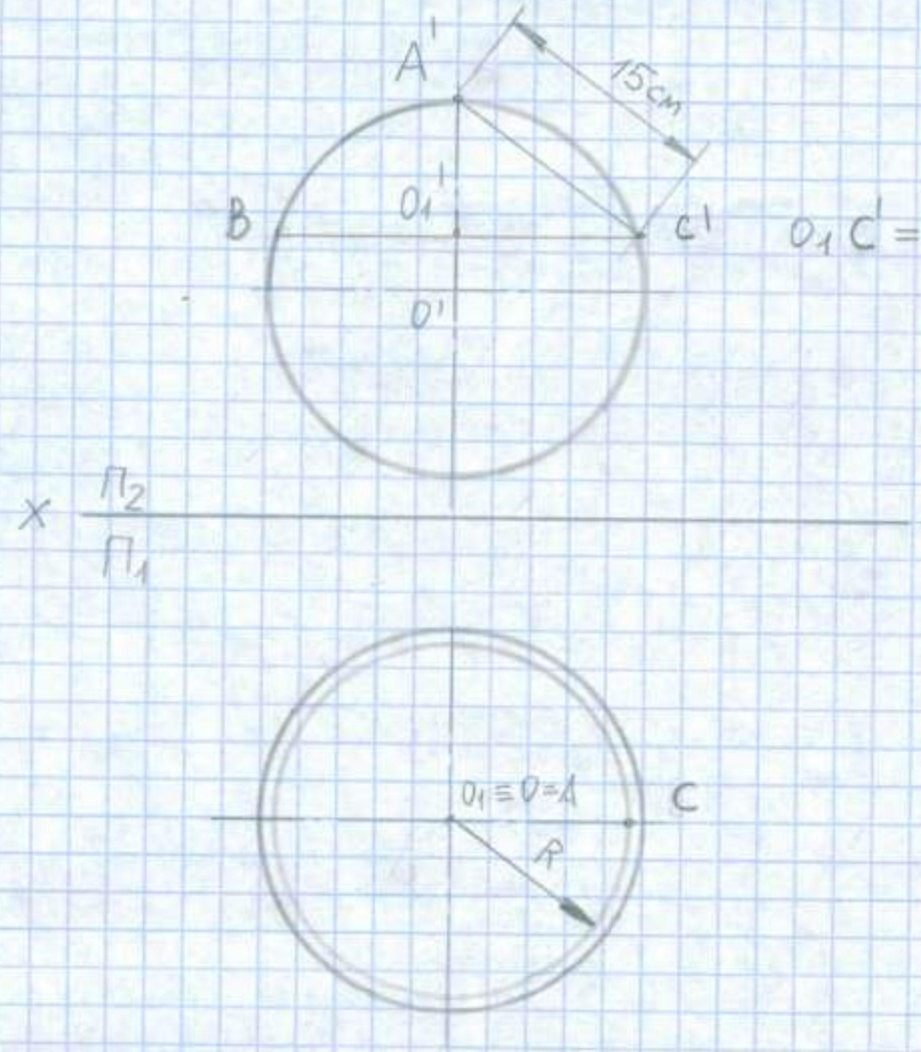
Ответ: 12см

Графическое решение:

1. Выбираем оптимальную проекцию на - π2, строим фронтальную проекцию шара по заданным размерам.
2. Находим положение точки А и С по заданным размерам.
3. Строим фронтальную проекцию плоскости окружности (отрезок ВС)
4. Проводим серединные перпендикуляры для нахождения центра описанной окружности.
5. CO_1 = 12 см – радиус окружности, на π2 является искомой величиной.

Задача 5

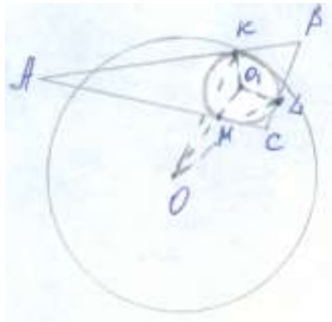
М 1:5



$O_1C' = R = 12$ см

Задача 6.

Стороны треугольника 13см, 14см и 15см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника. Радиус шара 5см. [2, с.106]



Дано: ΔABC

шар

$AB = 14$см

$AC = 15$см

$BC = 13$см

$r = 5$см

Найти: OO_1 – ?

Математическое решение:

Проведем OO_1 перпендикулярно плоскости ΔABC. Т.к. стороны ΔABC касаются шара, то OM, OK, OL перпендикулярны сторонам ΔABC. Тогда по теореме о трех перпендикулярах O_1M, O_1K, O_1L тоже перпендикулярны к соответствующим сторонам ΔABC.

$O_1M = r_1 = \frac{S}{p}$; $p = \frac{13+15+14}{2} = 21$см

$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{21*6*7*8} = \sqrt{7056} = 84$см^2

$r_1 = \frac{84}{21} = 4$см

ΔOO_1M - прямоугольный, $\angle OMO_1 = 90^0$

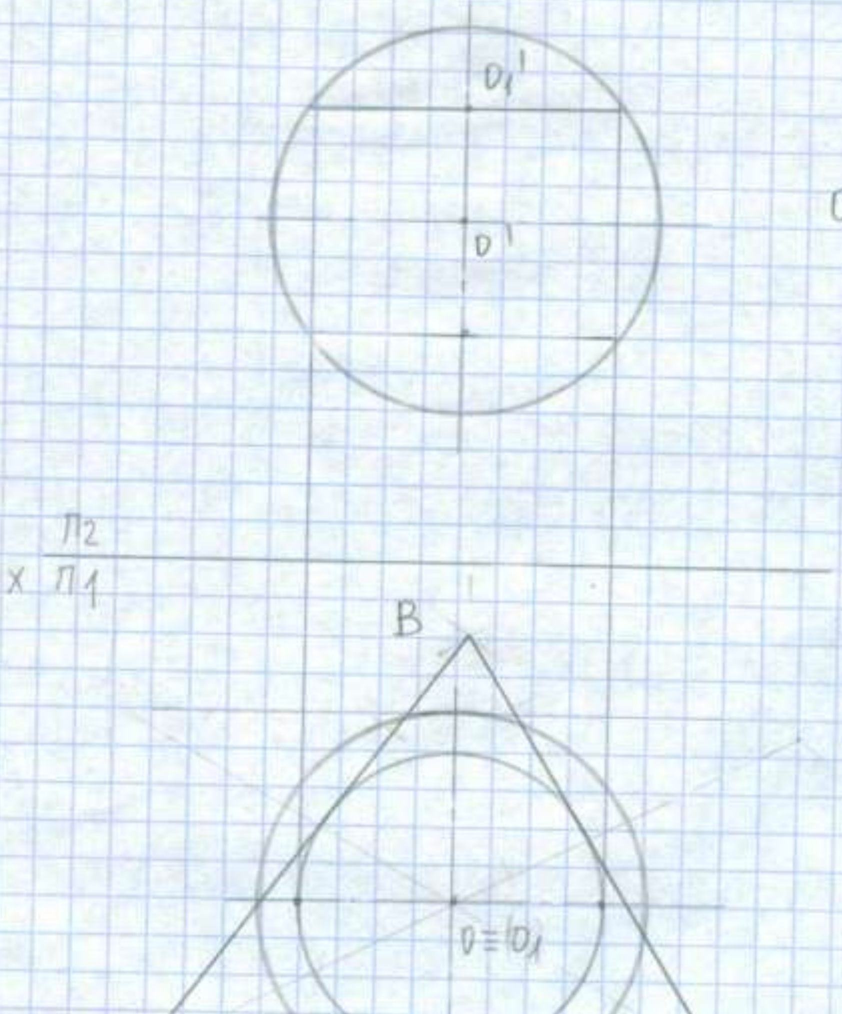
По т. Пифагора $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O1M^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$см

Ответ: 3см

Графическое решение:

1. Выбираем оптимальные проекции, то есть π1 и π2,
2. На горизонтальной плоскости проекции (π1) строим треугольник ABC по заданным размерам.
3. Проводим биссектрисы углов треугольника для нахождения центра вписанной окружности.
4. Строим горизонтальную и фронтальную проекции шара по заданным размерам
5. Находим положение плоскости треугольника на фронтальной проекции шара
6. $OO_1 = 3$см – расстояние от центра шара до плоскости треугольника, на π2 является искомой величиной.

Задача 6 М 1:2



$OO_1 = 3$ см

Задача 7.

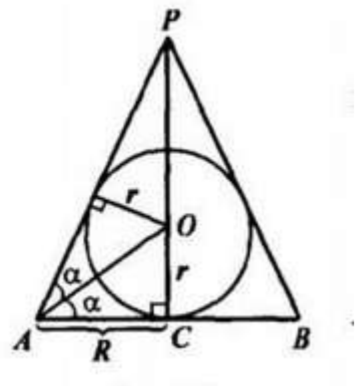
Найти объем конуса, если радиус его основания равен 6см, а радиус вписанной в конус сферы равен 3см. [1, с.181]

Дано: конус, сфера

AC = 6см

OC = 3см

Найти: $V_к$ – ?



Математическое решение:

Рассмотрим осевое сечение конуса

$V_к = 1/3\pi R^2 h$

PC = h

Из ΔAOC: $tg\alpha = \frac{r}{R} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, где $\alpha = \angle OAC$

OA – биссектриса ΔPAB, поэтому $\angle PAB = 2\alpha$

Из прямоугольного ΔPAC: $\frac{PC}{AC} = tg2\alpha$, $\frac{h}{R} = tg2\alpha$,

$H = Rtg2\alpha = 6tg2\alpha$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2*\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

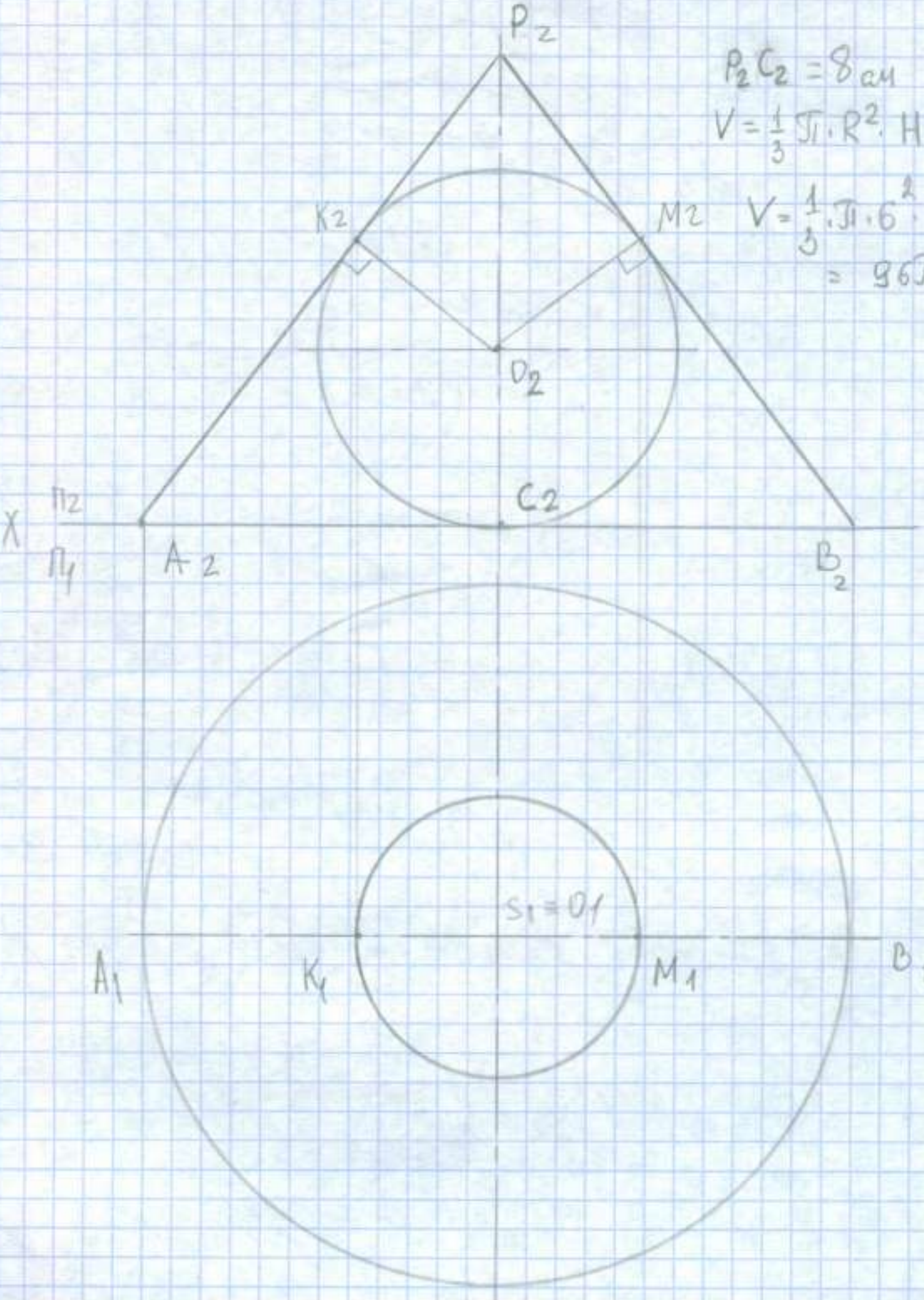
$H = \frac{6*4}{3} = 8$см

$V_к = 1/3\pi*6^2*8 = 96\pi$ см^3

Графическое решение:

1. Строим окружность на π2.
2. Учитывая, что радиус основания конуса известен, определим место расположения основания относительно вписанной сферы.
3. Из диаметрально противоположных точек основания проводим касательные к сфере. P – точка пересечения касательных.
4. PC = 8 см – искомая величина.
5. $V_к = 1/3\pi*6^2*8 = 96\pi$ см^3

Задача 7



$P_2C_2 = 8$ см

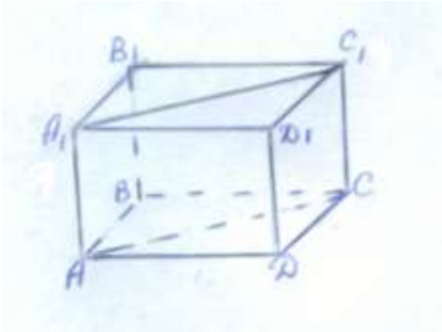
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 =$

$= 96\pi$ см^3

Задача 8.

В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 5дм и 12дм, а высота параллелепипеда 8дм. Найти площадь диагонального сечения. [2, с.86]



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоуг. параллелепипед

AD = 12дм

DC = 5дм

AA_1 = 8 дм

Найти: S_{AA1C1C} – ?

Математическое решение:

AA_1C_1C – диагональное сечение, прямоугольник

Δ ADC - прямоугольный, $\angle$ ADC = 90^0,

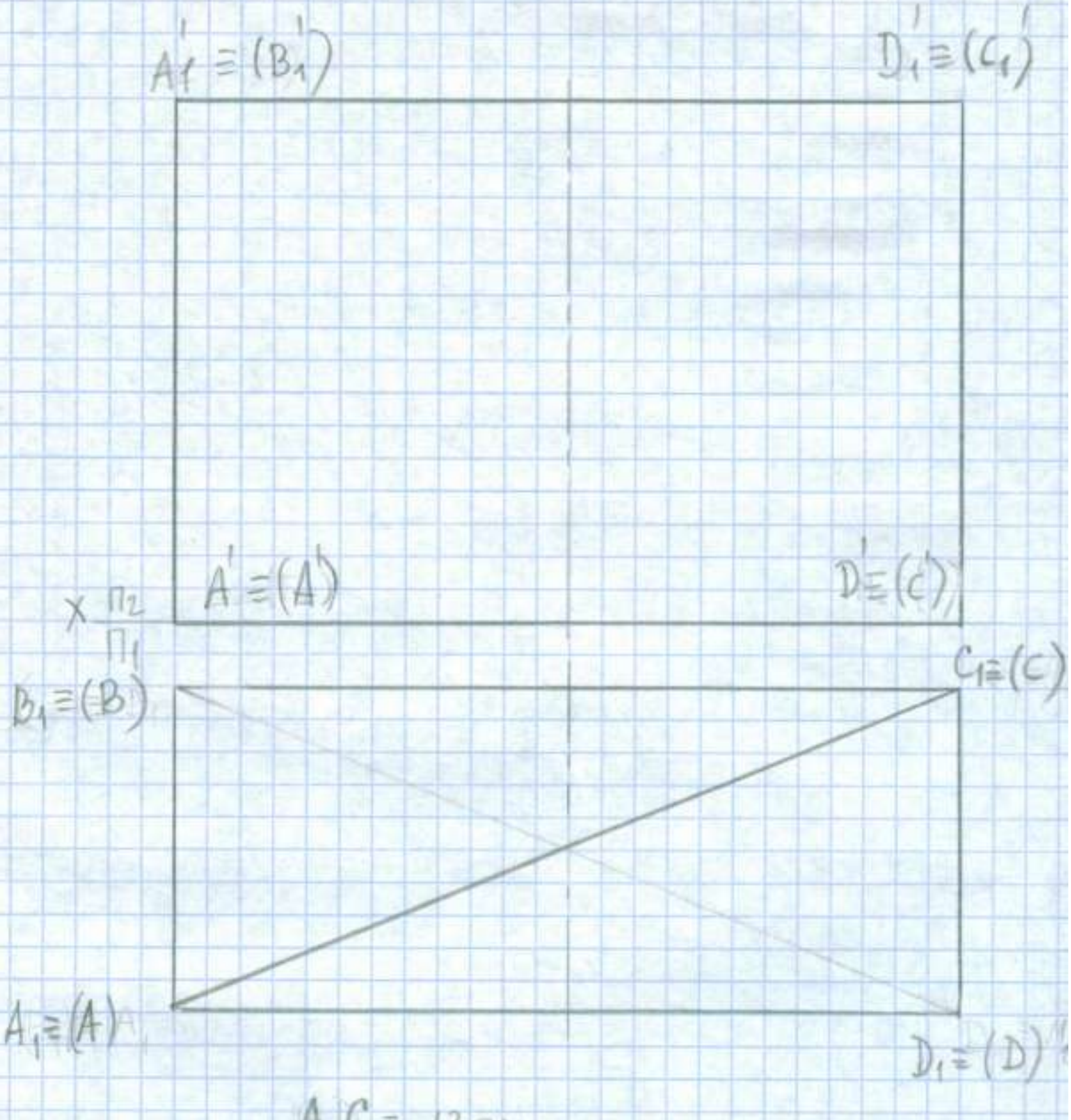
по т. Пифагора AC = $\sqrt{AD^2 + DC^2}$ = $\sqrt{12^2 + 5^2}$ = 13дм

$S_{AA1C1C} = AA_1 * AC = 8*13 = 104$ дм^2

Графическое решение:

1. Строим параллелепипед по заданным размерам. Используем проекции π1 и π2.
2. Для нахождения площади диагонального сечения необходимо знать размер диагонали основания. Проводим на π1 AC (диагональ).
3. AC = 13 дм - на π1 является искомой величиной.
4. $S_{AA1C1C} = AA_1 * AC = 8*13 = 104$ дм^2

Задача 8



$A_1C_1 = 13$ дм

Задача 9.

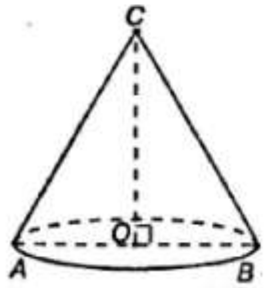
Радиус основания конуса 3см, высота 4см. Найти образующую. [2, с.104]

Дано: конус

OB = 3см

CO = 4см

Найти: CB – ?



Математическое решение:

Δ COB - прямоугольный, ∠ COB = 90^0, по т. Пифагора

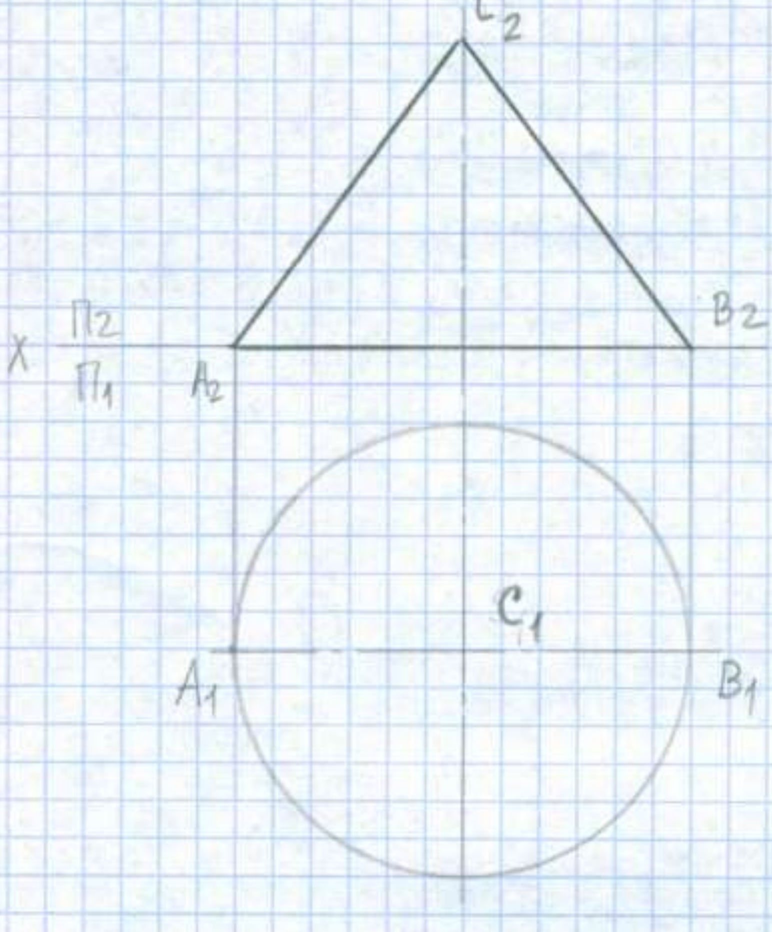
CB = $\sqrt{CO^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$ = 5см

Ответ: 5см

Графическое решение:

1. Строим конус по заданным размерам, используя фронтальную (π2) и горизонтальную (π1) проекции.
2. CB = 5 см – образующая конуса, на π2 является искомой величиной

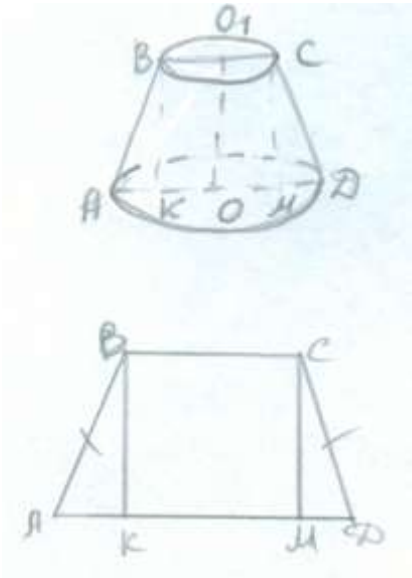
Задача 9



$C_2 B_2 = 5$ см

Задача 10.

Найти образующую усеченного конуса, если известно, что радиусы оснований равны 3 и 6 см, а высота 4 см. [1, с.140].



Дано: усеч. конус

BO_1 = 3 см

AO = 6 см

OO_1 = 4 см

Найти: AB – ?

Математическое решение:

BC || AD, ABCD – это равнобедренная трапеция

AK = MD = 1/2(AD– BC) = 1/2(12 – 6) = 3см

OO_1 = BK = 4см

Δ AKB – прямоугольный, ∠AKB = 90^0,

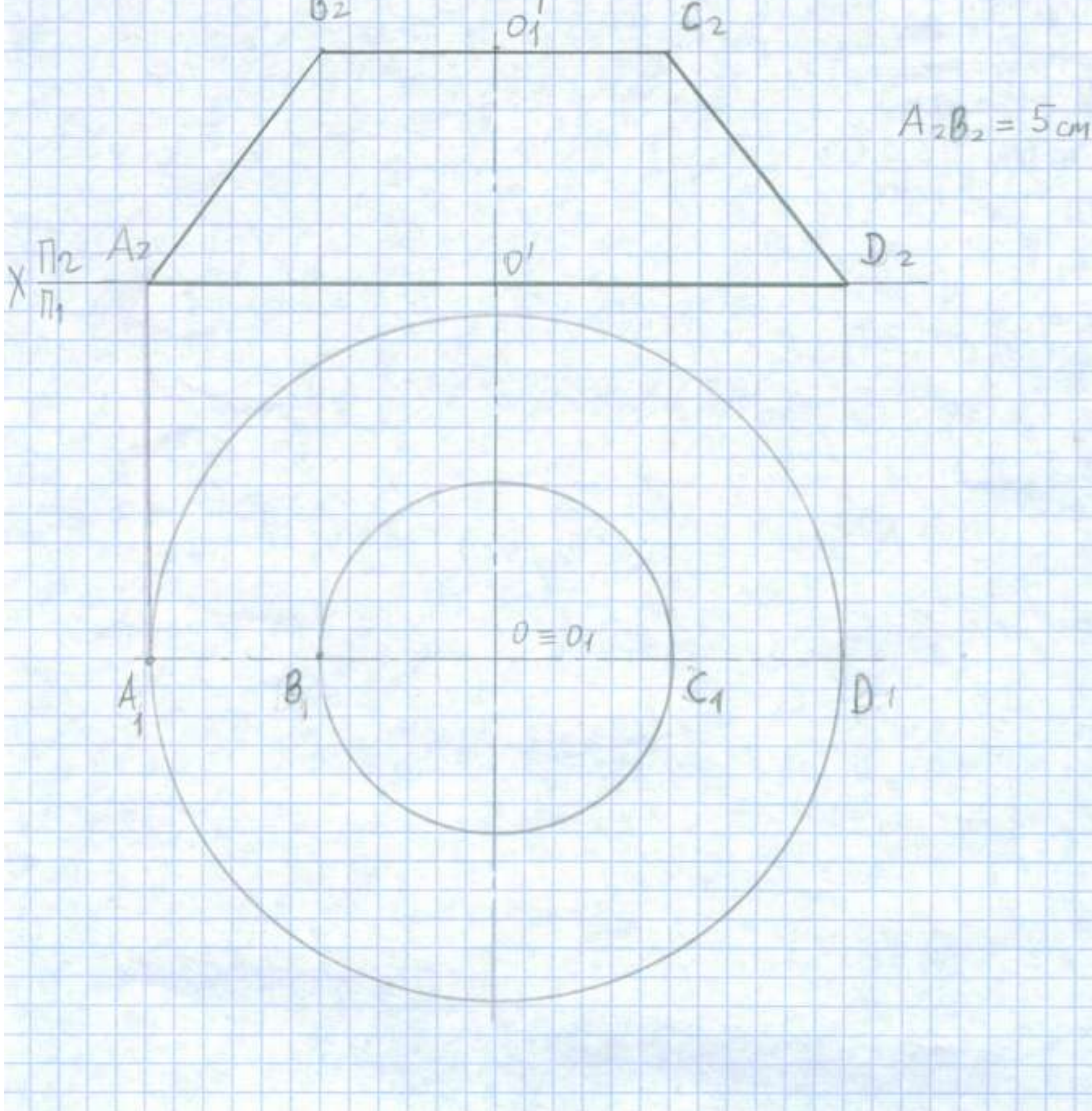
по т. Пифагора AB = $\sqrt{AK^2 + BK^2}$ = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5см

Ответ: 5см

Графическое решение:

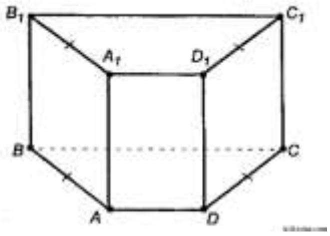
1. Выбираем оптимальные проекции, то есть π1 и π2. Строим усеченный конус по заданным размерам.
2. AB = 5см – образующая усеченного конуса, на π2 является искомой величиной

Задача 10



Задача 11.

Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основанием 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы. [1, с.90]

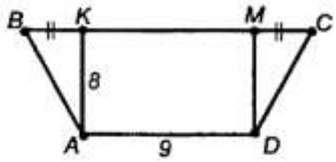


Дано: AD = 9 см

BC = 6 см

A_1A = 8 см

Найти: ∠BCD и ∠ CDA



Математическое решение:

ABCD – трапеция, AB = DC.

Найдем двугранный угол между плоскостями

BB_1C_1C и DD_1C_1C.

DC ⊥ C_1C, BC ⊥ C_1C,

поэтому ∠BCD – линейный угол искомого двугранного угла.

BK = MC, KM = 9 см

BK+MC = 25 – 9 = 16 см

BK = MC = 8 см

Δ AKB =Δ DCM, они прямоугольные и равнобедренные,

∠CBA=∠BCD=45^o

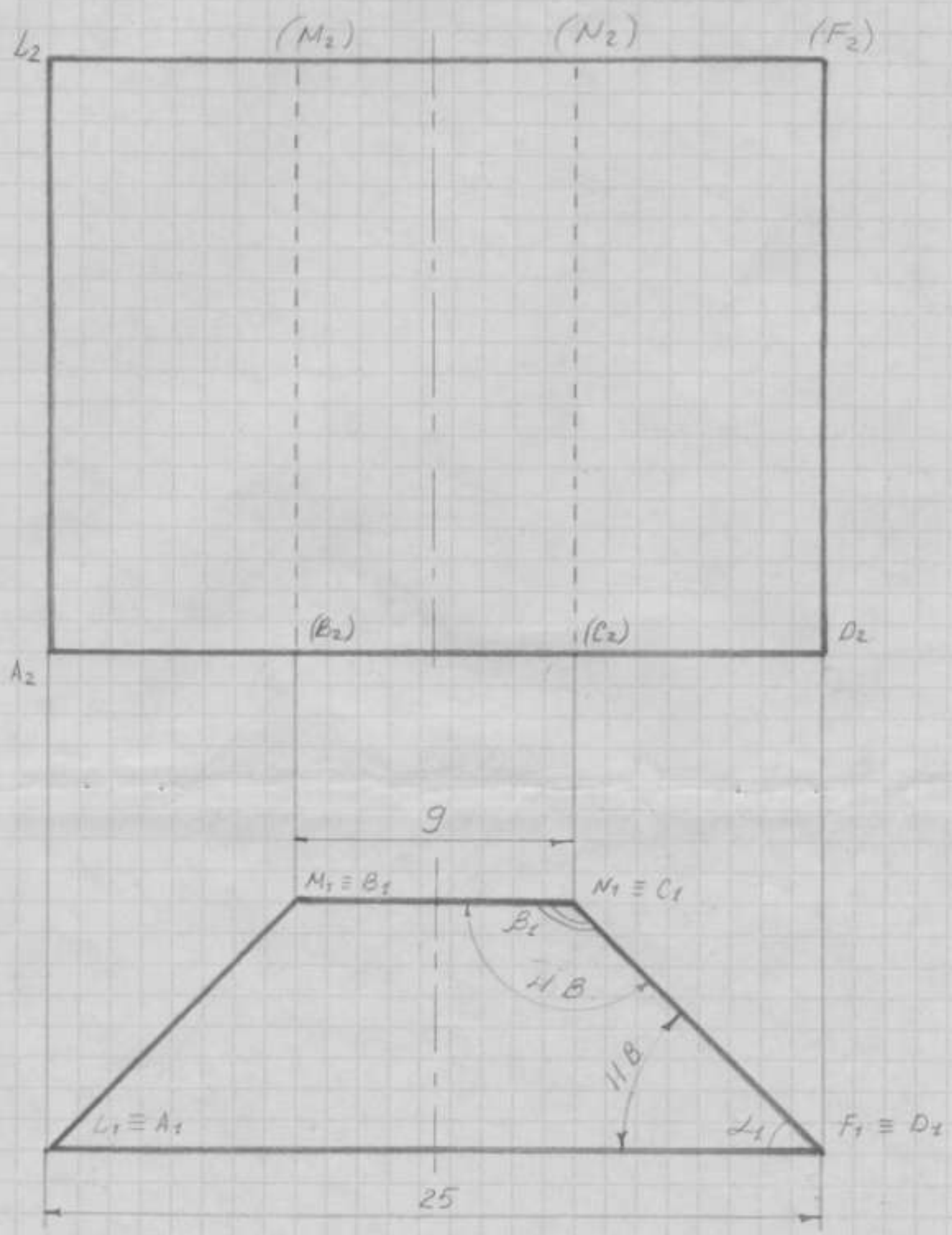
∠BAD – линейный угол двугранного угла передней и боковой грани,

∠BAD = ∠CDA = 135^o

Ответ: 45^o, 135^o, 45^o, 135^o.

Графическое решение:

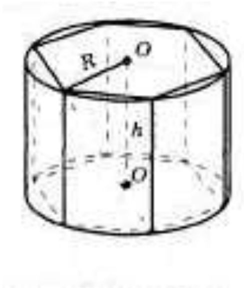
1. Выбираем оптимальные проекции, дающие искомые величины углов.
2. Строим призму по заданным проекциям.
3. ∠BCD и ∠CDA – искомые углы (двугранные углы при боковых ребрах призмы), измерением определяем их величину: 135˚,45˚.



L2
(M2)
(N2)
(F2)
(B2)
(C2)
D2
A2
9
M1 ≡ B1
N1 ≡ C1
β1
118
118
L1 ≡ A1
α1
F1 ≡ D1
25

Задача 12.

В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найти угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра. [2, с.104]



Дано: цилиндр

$R = h$

OO_1 – ось цилиндра

вписанная прав. шестиугольная призма

AM – диагональ боковой грани

Найти: $\angle$ OFM

Математическое решение:

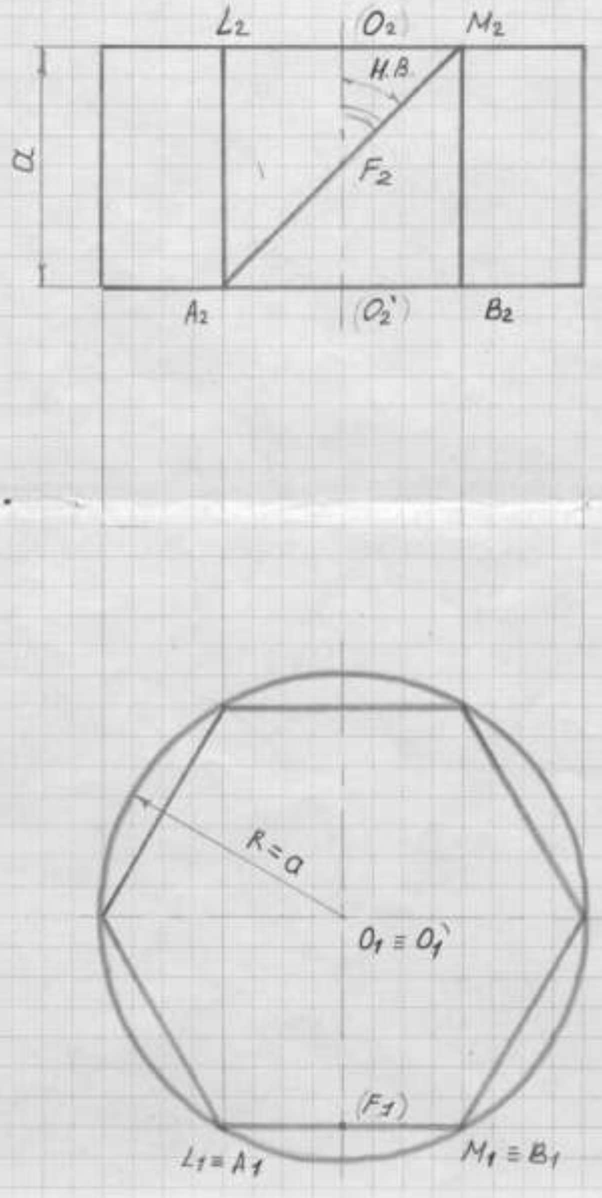
Боковые грани призмы – квадраты, т.к. сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу. Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45^0, т.к. грани – квадраты.

Графическое решение:

1. Из точки O_1 на $\pi 1$ проведем окружность удобного нам радиуса R.
2. Вписываем в окружность (основания цилиндра) шестигранную призму (на $\pi 1$ данная призма представляет собой правильный шестиугольник вписанный в окружность)
3. Строим проекцию на $\pi 2$.
4. Через точки A и M проводим диагональ AM.

O_1O_2 и AM – скрещивающиеся прямые.

5. $\angle$ OFM = 45^0 – искомая величина.



L_2
(O_2)
M_2
Н.В.
a
F_2
A_2
(O_2')
B_2
$R=a$
$O_1 \equiv O_1'$
(F_1)
$L_1 \equiv A_1$
$M_1 \equiv B_1$

Заключение

Анализ решения задач показывает, что в зависимости от условий задачи стоит подбирать наиболее подходящий для решения метод: в тех случаях, когда математическое решение очень сложно и сразу его тяжело увидеть, проще использовать графический метод, а когда графические построения отнимают много времени – лучше использовать математический метод.

Успешное решение задачи в значительной степени зависит от выбора метода ее решения, поэтому любой студент должен иметь представление о том, каким методом решить ту или иную задачу, какие направления рассуждений в большей степени использовать.

На основании нашего исследования можно говорить о подтверждении гипотезы. Графические методы возможно применять при решении стереометрических задач. Графические методы позволяют заменить сложный расчет по формулам, поэтому позволяют оптимизировать решение подобных задач.

Библиографический список

1. Геометрия 10-11 кл. учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Анатасян, В.Ф.Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - М.: Просвещение, 2009, 255.
2. Геометрия: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. - М.: Просвещение, 2006, 175с.
3. Куликов В.П., Кузин А.В., Демин В.М. Инженерная графика: учебник. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007, 368с.
4. Райтман И. Решение стереометрических задач на проекционном чертеже. //Математика, №7, 1996г.